UMONS
Université de Mons

LES FRACTIONS

1. Contexte

Selon Giroux (2013), l'enseignement des fractions est un thème mathématique incontournable, placé au cœur de la transition primaire/secondaire : « *chez les élèves du secondaire, la fraction trouve son prolongement dans l'étude des rationnels, de la proportionnalité, des probabilités et statistiques ainsi que de l'algèbre.* » (Giroux, 2013). De plus, la fraction est utilisée dans d'autres disciplines tels que les sciences. Divers auteurs, à l'instar de Boulet (1998, cité par Giroux, 2013), Chick (2010) ou encore Mills (2016), déclarent que, pour les enseignants, les fractions constituent une matière difficile à comprendre et à enseigner. Par conséquent, elle peut engendrer des difficultés de compréhension chez les élèves.

2. Définition

Une fraction à termes entiers est un nombre écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a un entier appelé numérateur et b un entier non nul appelé dénominateur. Cette fraction correspond donc aux nombres rationnels.

La notion de fraction renvoie à plusieurs interprétations et donc à différentes conceptions des fractions. Kieren (1976) a réalisé un modèle reprenant ces différentes conceptions, et ce dernier est repris par de nombreux auteurs à l'instar de Houle (2016). Au sein de ce modèle, Kieren (1976) a identifié quatre conceptions : mesure, rapport, opérateur, quotient. Par ailleurs, une notion, nommée partie-tout, vient compléter le modèle. Cette notion, étant impliquée dans les quatre autres conceptions susmentionnées, n'est pas considérée par Kieren (1976) comme une conception à part entière de la fraction. Toutefois, Behr, Lesh, Post et Silver (1983, cités par Carette, Content, Rey, Coché & Gabriel, 2009) s'opposent à cette idée puisqu'ils la considèrent comme telle et viennent compléter le modèle proposé par Kieren.

2.1. La fraction « partie/tout » :

La notion « partie/tout », relève du langage courant. Dans cette notion, il est question de considérer, comme son nom l'indique, la valeur d'une partie par rapport à un tout. Ainsi, la fraction $\frac{a}{b}$ revient à considérer a parties d'un tout partagé en b parties égales. De plus, il est possible de considérer le tout comme un seul élément ou comme un ensemble fini d'éléments.

À titre d'exemple impliquant une fraction « partie/tout », il est possible de citer que la fraction $\frac{3}{8}$ peut désigner 3 objets d'une collection de 8 objets. Les illustrations suivantes constituent respectivement une bonne représentation de cette notion pour les fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{8}$.

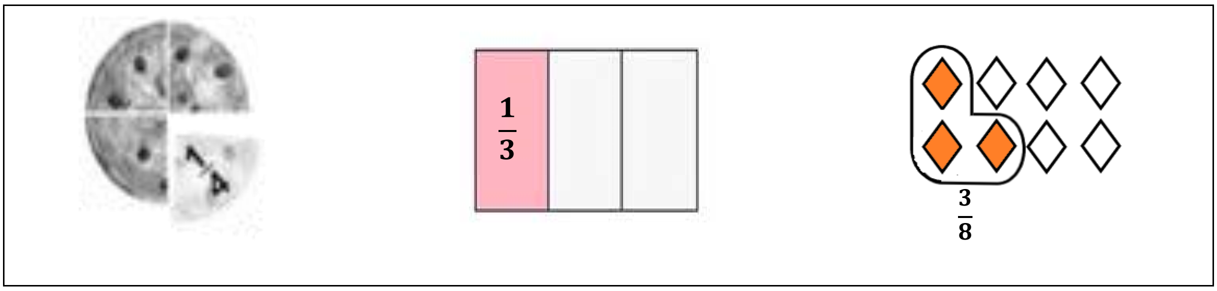


Figure 1 : Illustrations de la fraction « partie/tout »

Avec cette conception, le numérateur de la fraction doit être plus petit ou égal à son dénominateur puisque dans ce contexte, le « tout » ne doit figurer qu'en un seul exemplaire. Par conséquent, cette interprétation de la fraction ne permet pas de donner du sens à une fraction supérieure à l'unité. En outre, la considération de la fraction en tant que structure multiplicative apparait peu évidente. Malgré cela, Behr et coll. (1983, cités par Houle, 2016) relèvent que l'acquisition de cette interprétation de la fraction est fondamentale pour développer les autres interprétations.

2.2. La fraction « quotient » :

La fraction « quotient » est une conception qui présente la fraction comme le résultat d'une situation de division. Il s'agit ainsi de présenter $\frac{a}{b}$ comme équivalent à $a : b$. Néanmoins, accepter cette équivalence n'est pas une évidence pour les apprenants. Cette conception de la fraction permet d'établir une relation multiplicative entre le numérateur (correspondant au dividende) et le dénominateur (correspondant au diviseur). Pour développer concrètement cette interprétation de la fraction, il est possible de présenter le numérateur de la fraction comme la quantité d'objets qu'il faut partager et le dénominateur comme le nombre d'éléments entre lesquels s'effectue le partage. La situation consistant à partager trois barres de chocolats entre huit personnes, illustrée ci-après, constitue un exemple pour la fraction $\frac{3}{8}$.

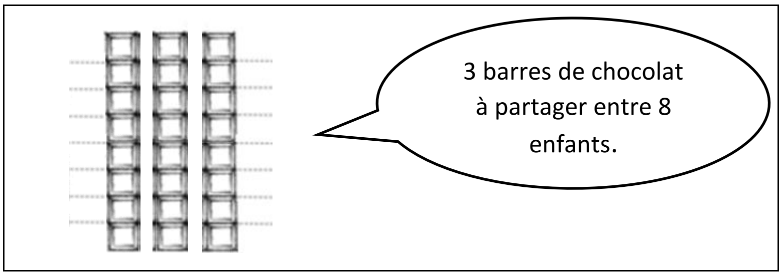


Figure 2 : Illustration de la fraction « quotient »

2.3. La fraction « opérateur » :

Dans cette conception, les fractions sont considérées comme des fonctions qui peuvent être appliquées à certains nombres, objets ou encore ensembles. Cela peut être représenté par l'illustration ci-dessous.

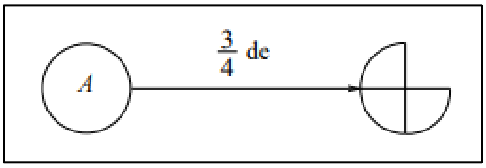


Figure 3 : Représentation de la fraction « opération »

L'exemple « Maxime a perdu $\frac{1}{4}$ de ses billes » est une situation où la fraction a le statut de fraction « opérateur ». Il en est de même par exemple pour les problèmes de type « Combien de filles sont présentes dans la foule si tu sais qu'il y a 240 personnes au total et que les $\frac{3}{4}$ de ces personnes sont des filles ».

Par ailleurs, comme opérateur, la fraction peut aussi constituer une transformation effectuée sur des grandeurs. Dans ce cas, il s'agit, si le numérateur est supérieur au dénominateur ou autrement dit si l'opérateur est supérieur à 1, d'un agrandissement de la grandeur initiale, et dans le cas inverse, d'une réduction. L'exemple suivant en est une illustration pour la fraction $\frac{1}{3}$. On y observe en effet une réduction de la figure initiale.

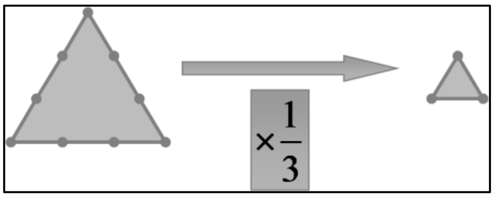


Figure 4 : Illustration de la fraction « opération »

2.4. La fraction « mesure » :

La fraction « mesure » est associée à la mesure assignée à un intervalle. Autrement dit, une fraction unitaire, pouvant s'écrire sous la forme $\frac{1}{n}$, comme par exemple $\frac{1}{4}$, est d'abord définie et devient l'unité de mesure de référence à la place de 1. Cette mesure est ensuite utilisée de manière répétitive afin de déterminer une distance par rapport à un point de départ. Dès lors, la fraction $\frac{3}{4}$ est interprétée comme l'itération à trois reprises de l'unité $\frac{1}{4}$ réalisé ($\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$). La figure suivante permet d'illustrer cette conception de la fraction.

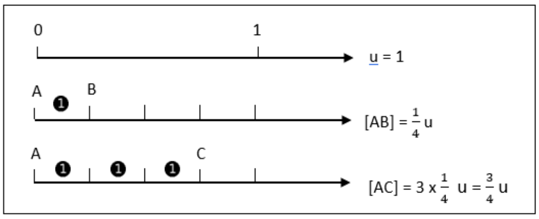


Figure 5 : Illustration de la fraction « mesure »

Contrairement à la conception « partie/tout », cette interprétation permet aisément d'aborder les fractions supérieures à l'unité. En outre, on observe que pour cette interprétation de la fraction, la droite des réels est un contexte emblématique (Charalambos & Charalambous Pitta-Pantazi, 2007, cités par Houle, 2016). En effet, il est question d'identifier sur cette droite le point correspondant à une fraction donnée ou inversement, d'identifier la fraction correspondant à un point donné. Toutefois, le modèle de la droite des réels reste un modèle pour lequel les élèves ont des difficultés d'interprétation, ce qui est un obstacle à l'appropriation des fractions.

2.5. La fraction « rapport » :

Dans la conception « rapport », la fraction est utilisée pour comparer deux quantités différentes ou deux grandeurs exprimées numériquement. Par exemple, la fraction $\frac{3}{8}$ peut ainsi illustrer le fait que dans une boisson, il faut 3 portions de jus concentré pour 8 portions d'eau.

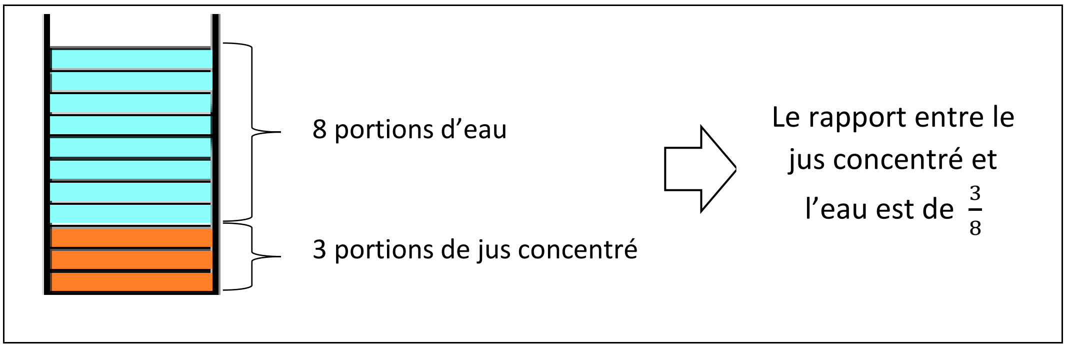


Figure 6 : Illustration de la fraction « rapport »

Dans cette interprétation, il est donc question de proportions. La compréhension de cette interprétation de la fraction apparait essentielle pour la maitrise de nombreuses notions abordées au cours de l'enseignement secondaire comme la proportionnalité, les taux et pourcentages ou encore les probabilités.

Dans la fraction « rapport », la collection dénombrée par le numérateur n'est pas nécessairement incluse dans celle dénombrée par le dénominateur. Par exemple, il est possible de calculer le rapport des filles et des garçons dans un groupe de personnes, qui pourrait valoir $\frac{1}{3}$ (1 fille pour 3 garçons). En cela, elle apparait différente de le fraction « partie/tout » qui viserait plutôt à présenter ce que représentent la part des filles par rapport à l'ensemble du groupe (les filles représentent $\frac{1}{4}$ du groupe).

D'autres modèles assez proches de celui susmentionné peuvent être mis en évidence. Celui de Nunes et Bryant (1995), cité par Carette et al. (2009), met en évidence plusieurs types d'utilisations de fractions : quantifier la partie d'un tout, quantifier le quotient, représenter un opérateur de calcul, et enfin représenter une relation entre des quantités. Le modèle de Grégoire (2008) cité par Carette et al. (2009), propose trois catégories correspondant à trois stades d'acquisition qui vont du plus concret au plus abstrait : la fraction-opérateur (sur des objets concrets, sur des représentations semi-concrètes, sur des grandeurs discrètes ou continues), la fraction rapport et enfin la fraction nombre.

3. Les obstacles liés aux fractions

Nombre d'auteurs, dont Mills (2016), Houle (2016), Giroux (2013), Adjiage (2007), Olanoff, Lo et Tobias (2014) ou encore Carette et al. (2009), s'accordent pour déclarer qu'une difficulté fondamentale réside dans les différentes interprétations attribuées à la fraction et présentées dans le point précédent. En effet, face à une situation, diverses interprétations de la fraction peuvent être sollicitées par l'élève. Houle (2016, p.72-73) propose l'exemple suivant qui illustre cette multiplicité des interprétations :

> *« Un problème de partage : 5 enfants se partagent également 2 tablettes de chocolat. Combien chacun en aura-t-il ? […] la résolution de ce problème fait appel à la division. L'interprétation quotient est donc celle qui permet de procéder à l'opération 2 ÷ 5 et d'obtenir la fraction $\frac{2}{5}$ comme quotient. Chaque enfant aura donc les $\frac{2}{5}$ d'une tablette. Il est également possible de procéder en partitionnant chacune des tablettes en 5. À chaque enfant, on attribue une partie de chaque tablette issue de cette partition. Chaque enfant reçoit alors $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ et donc $\frac{2}{5}$ d'une tablette. Dans ce cas, la partition de chaque tout fait appel à l'interprétation partie/tout et l'itération de $\frac{1}{5}$ fait appel à l'interprétation mesure où $\frac{2}{5}$ est composé additivement de $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{5}$. Se référant cette fois à l'interprétation opérateur, on pourrait considérer que la quantité de chocolat que recevra chaque enfant est issue d'une transformation d'une quantité initiale. Considérant la mesure initiale « 2 tablettes de chocolat », et la transformation nécessaire à effectuer pour que chacun des 5 enfants ait une part égale, on peut dégager l'opérateur $\frac{1}{5}$. Ainsi, 2 tablettes de chocolat x $\frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ de tablette de chocolat. Enfin, il est possible de considérer que nous cherchons à établir deux rapports équivalents : 2 tablettes de chocolat pour 5 enfants = x tablette(s) de chocolat pour 1 enfant ».*

Il est en outre possible de constater que l'articulation entre les différentes interprétations peut s'avérer difficile. Par exemple, Il peut être effectivement difficile de concevoir qu'un même résultat est obtenu lorsque 2 parts d'un gâteau partagé en 5 parts égales sont prélevées (fraction « partie/tout ») et lorsque 2 gâteaux sont partagés de manière égale entre 5 personnes (fraction « quotient ») (Houle, 2016).

De plus, notamment suite aux expériences quotidiennes proposées aux élèves pour aborder les fractions, qui les invitent à les considérer le plus souvent comme les parties d'un tout, les élèves ont des difficultés à concevoir que les fractions sont des nombres à part entière et pas uniquement deux nombres sans lien entre eux (Coquin & Camos, 2006).

Par ailleurs, une autre difficulté principalement rencontrée dans l'apprentissage des fractions résiderait dans le fait que, selon Ni et Zhou (2005, cités par Carette et al., 2009), les élèves appliquent les représentations qu'ils ont des nombres naturels aux fractions : « *cette généralisation abusive de connaissances sur les nombres naturels est d'autant plus résistante que ces connaissances sont largement antérieures à celles des rationnels.* » (Carette et al., 2009, p. 19). Or, il existe entre ces deux types de nombres des différences non négligeables, qui deviennent alors des sources d'erreurs potentielles pour les apprenants :

- L'existence d'une infinité de nombres rationnels (densité) :

  Entre deux nombres rationnels, il existe une infinité de nombres rationnels alors que ce n'est pas le cas pour les naturels ou pour les entiers. En effet, en termes de densités, les nombres naturels peuvent être qualifiés de discrets, contrairement aux rationnels.

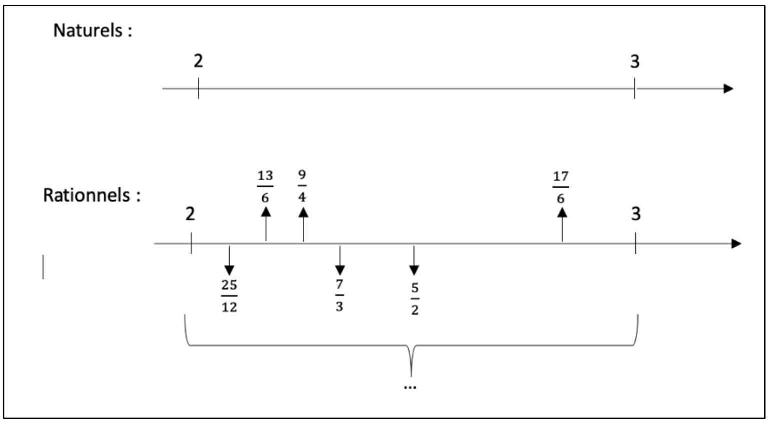


Figure 7 : Illustration de l'obstacle « L'existence d'une infinité de nombres rationnels »

- La notion de successeur déterminé dans l'ensemble des nombres naturels :

  Découlant de la différence entre naturels et rationnels énoncée ci-avant, cette différence relève de la présence pour chaque nombre d'un successeur déterminé dans les naturels, ce qui n'est pas le cas dans les rationnels.

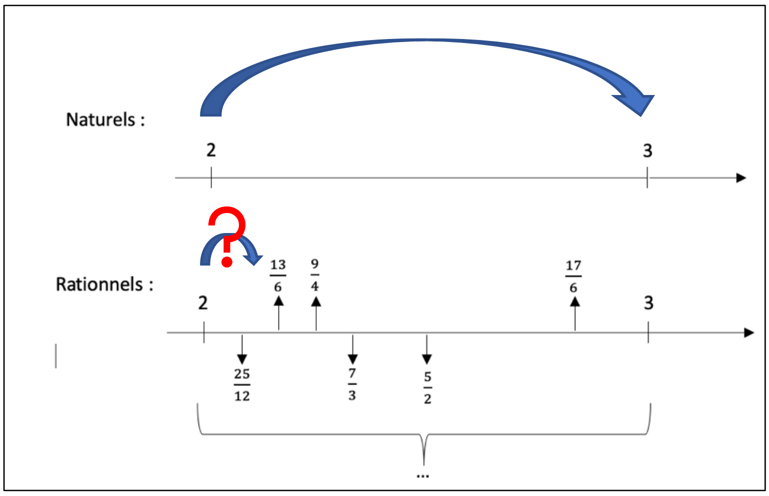


Figure 8 : Illustration de l'obstacle « La notion de successeur déterminé »

- La possibilité d’écriture à partir d’une infinité de fractions d’entiers (fractions équivalentes) ;

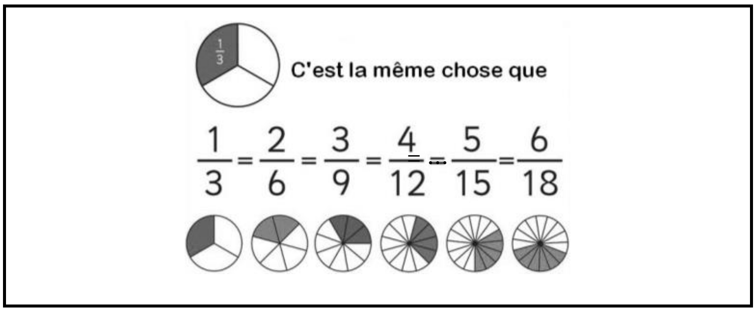


Figure 9 : Illustration de l’obstacle « La possibilité d’écriture à partir d’une infinité de fractions d’entiers »

- La notion d’opposés multiplicatifs (inverses) pour les rationnels et non additifs comme pour les entiers Chick (2010) ;

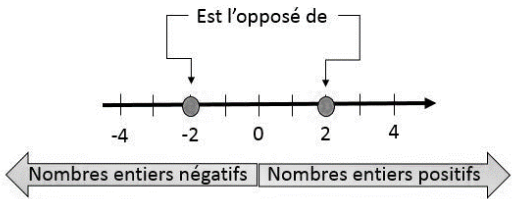
Le produit de deux nombres inverses vaut 1.	La somme de deux nombres opposés vaut 0.
L’inverse de $\frac{5}{9}$ est $\frac{9}{5}$ $\frac{5}{9} x \frac{9}{5} = \frac{5 x 9}{9 x 5} = \frac{45}{45} = 1$	 - 2 + 2 = 0

Figure 10 : Illustration de l’obstacle « La notion d’opposé … »

- L’application de procédures propres aux entiers ou aux naturels :

  Puisque les écritures fractionnaires sont de la forme $\frac{a}{b}$, les élèves traitent souvent les nombres a et b comme deux nombres entiers ou naturels sans lien entre eux ce qui les amène à appliquer aux fractions des procédures propres aux nombres entiers ou aux nombres naturels. Cela entraine l’apparition d’erreurs courantes comme par exemple dans les tâches d’addition de fractions où on observe les élèves additionner les numérateurs entre eux et faire de même avec les dénominateurs.

$$\boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2}{8} \ car \ \frac{1+1}{3+5}}$$

Figure 11: Illustration 1 de l’obstacle « L’application de procédures propres aux entier … »

Une autre erreur-type concerne les tâches de comparaison de fraction puisque les élèves vont considérer $\frac{1}{2}$ comme inférieur à $\frac{1}{3}$ puisque 2 est inférieur à 3.

$$\boxed{\frac{1}{2} < \frac{1}{3} \quad car \quad 2 < 3}$$

Figure 11: Illustration 2 de l’obstacle « L’application de procédures propres aux entier … »

On observe aussi une difficulté pour certains élèves à concevoir qu’une multiplication dans les rationnels n’amène pas systématiquement à un résultat plus grand que le nombre de départ, ce qui est le cas dans les naturels.

4. Pistes

Pour le premier obstacle évoqué, Carette et al. (2009), Mills (2016), Houle (2016), Lamon (2012, cité par Olanoff, Lo & Tobias, 2014) soulignent l’intérêt de travailler avec les élèves un plus large éventail de concepts/représentations de fractions, afin de les confronter davantage aux propriétés propres aux nombres rationnels et d’élargir leur vision de ceux-ci, actuellement limitée et stéréotypée. Cela permettrait alors une compréhension bien plus profonde de la notion. Il s’agit donc de s’appuyer sur les différentes interprétations de la fractions mises en évidence pour choisir des situations variées à proposer aux élèves. Moseley (2005) a d’ailleurs pu mettre en évidence l'intérêt d'un enseignement de la fraction qui s'appuie sur une diversité conceptuelle, en comparaison à un enseignement exclusivement centré sur la fraction « partie/tout ». Il souligne que la première démarche permet aux élèves d'organiser leurs connaissances et de mettre en lien le concept de fraction avec d'autres notions mathématiques comme par exemple la multiplication et la division.

Dans le but de surmonter la seconde difficulté énoncée, « *il semble nécessaire d'amener les élèves à effectuer une réorganisation conceptuelle, qui intègrerait les rationnels comme une nouvelle sorte de nombres, avec leurs propriétés et leurs règles de fonctionnement propres.* » (Carette et al., 2009).

UMONS
Université de Mons

Bibliographie

Adjiage, R. (2007) Rationnels et proportionnalité : complexité et enseignement au début du collège. *Petit x, 74*, 5-33.

Carette, V., Content, A., Rey, B., Coché, F. & Gabriel, F. (2009). *Étude de l'apprentissage des nombres rationnels et des fractions dans une approche par compétences à l'école primaire, recherche financée par la Communauté française*. Consulté à l'adresse https://www2.ulb.ac.be/facs/sse/img/fractions.pdf

Chick, H. (2010). Aspects of teachers' knowledge for helping students learn about ratio. Dans *Shaping the future of mathematics education* : proceedings of the 33 rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (pp. 145-152). Fremantle, WA: MERGA

Coquin-Viennot D. & Camos V. (2006). Décimaux et fractions. Dans P. Barrouillet & V. Camos (Eds.*), La cognition mathématique chez l'enfant* (pp145-154). Marseille : Solal

Giroux, J. (2013). Entretiens didactiques sur la fraction auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage. Dans *Expériences mathématiques uniques et multiples : actes du colloque du groupe de didactique des mathématiques du Québec* (pp.52-61). Val-d'Or : Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue.

Houle, V. (2016). *Fondements didactiques pour une intervention orthopédagogique sur la notion de fraction* (Thèse de doctorat). Université du Québec, Montréal. Consulté à l'adresse https://archipel.uqam.ca/10649/1/D3115.pdf

Kieren T.E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. Dans R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement : Papers from a Research Workshop ERIC/SMEAC* (pp. 101–144) Columbus, OH.

Mills, J. (2016). Developing Conceptual Understanding of Fractions with Year Five and Six Students. Paper presented at the Annual Meeting of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA), Adelaide. Consulté à l'adresse https://eric.ed.gov/?id=ED572324

Moseley, B. (2005). Students' early mathematical representation knowledge: the effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *60*, 37-69.

Olanoff, D., Lo, J. & Tobias, J. (2014). Mathematical Content Knowledge for Teaching Elementary Mathematics : A Focus on Fractions. *The Mathematics Enthusiast*,*11*(2), 267-343.